Magnetic Properties of Superconducting Alloys I.
The Upper Critical Field.

真　木　和　美（京大理）

（３月１６日受理）

1° 強い磁場のもとでの超伝導体のふるまいは普通Ginzburg-Landau の式を用いて記述されるがGor'kov[1] によつて示されたように、この式は転移温度の極く近くのせまい温度領域でしかこのままの形では成立しないことが知られている。最近Tewordt[2] 及びTsuzuki[3] Nambu et Tuan[4] によつてGap parameterの磁場依存性をしらべるのに用いられた方法を任意の温度に拡張することによつてG－L方程式の一般化をこころみたけれども、これは磁場が比較的弱く $\Delta(x)$の場所的変化がゆるやかな時にしか有効でないように思われる。

一方Gor'kov[5] は Δ についての式を線型化することによつて超伝導体には普通の熱力学的な臨界磁場 H_c の他に正常相が局所的超伝導状態の発生について不安定になる限界に対応する臨界磁場 H_{c2} が存在することを示し、かつ任意の温度での H_{c2} を求めた。この方法はShapoval[6]によつて最近超伝導合金で電子の平均自由行路の短い場合に適用された。

G－L方程式の解の性質の分析からAbrikosov[7]第二種の超伝導体は、ある磁場 H_{c1} のところから完全反磁性の性質がやぶれ磁場は量子化された磁束となつて規則的な間隙をおいて超伝導体に侵入し、こうしたmixed stateは H_c より大きな H_{c2} まで続き、H_{c2} のところで二次の相変化によつて正常状態にうつることを示した。我々はこれから三部に別れて発表される論文の中で、平均自由行路が短い極限での超伝導体をGor'kov 方程式を用いて任意の温度でとりあつかい。このときのAbrikosov の構造がどんなものかしらべようと思う。ここでは先づ H_{c2} をShapoval とちがつたやり方で求めてみよう。

2° Shapovval は $\ell/\xi_0 \ll 1$ の時に次のような線型積分方程式をえた。[6)]

$$\Delta(r)=\int \exp\{-\frac{ieH}{2c}(y+y')(x-x')\}K(r-r')\Delta(r')dr' \tag{1}$$

ここで磁場の方向をz軸にとり、指数項は準古典近似で磁場の効果をとり入れたことになつている。K(r−r′)のFourier 変換は

$$\tilde{K}(q)=\frac{|q|}{(2\pi)^4}2\pi T\sum_n \frac{1}{\omega_n+\frac{\tau_{tr}}{6}v^2q^2} \tag{2}$$

$$\omega_n=2\pi(n+\frac{1}{2})T\ ,\qquad T：温度；\qquad v．フエルミ速度$$

のようにかける。

磁場のない場合には(1)式はWerthamer[8)]によれば次のような微分方程式にかける。

$$\{\ln T/T_{c0}+f_0(-\frac{\tau_{tr}v^2}{12\pi T}\nabla^2)\}\Delta(r)=0\ , \tag{3}$$

ここに $f_0(a)=\psi(\frac{1}{2}+a)-\psi(\frac{1}{2})$ で T_{c0} は磁場のないときの臨界温度、$\psi(z)$ はdi-gamma 函数である。

すぐわかるように一般のGauge 変数に対しての不変性から(3)式は磁場ののあるときにはベクトル・ポテンシャル $\vec{A}$ を用いると、

$$\{\ln T/T_{c0}+f_0(-\frac{\tau_{tr}v^2}{12\pi T}(\nabla-2ieA)^2)\}\Delta(r)=0 \tag{4}$$

のように拡張できる。いま磁場の方向をz方向にとりA=(0, Hx, 0) のようにとることができ、Δ がxのみによるものとすれば、(4)式は

$$\{\ln T/T_{c0}+f_0(-\frac{\tau_{tr}v^2}{12\pi T}(\frac{\partial^2}{\partial x^2}-4e^2H^2x^2))\}\Delta(x)=0 \tag{5}$$

のような固有方程式になる。この式は容易に

$$-\ln T/T_{c0}=f_0(\frac{\tau_{tr}v^2}{6\pi T}eH)\ , \tag{6}$$

$$\Delta(x) = e^{-eHx^2} , \tag{7}$$

がえられ、(6)式から任意の温度での H_{c2} を求めることができる。

特に $\varphi(2)$ の漸近型を用いると

i) $T \ll T_{c0}$

$$\ln\left(\frac{2\tau_{\tau r} v^2 eH}{3\Delta_{00}}\right) = -\frac{2}{3}\left(\frac{\pi T}{\Delta_{00}}\right)^2 , \tag{8}$$

から

$$H_{c2} = \frac{3}{2}\frac{\Delta_{00}}{\tau_{\tau r} v^2 e}\left(1-\frac{2}{3}\left(\frac{\pi T}{\Delta_{00}}\right)^2\right) , \tag{9}$$

$$H_{c2}/H_c = \frac{\pi^2}{2}(7\zeta(3))^{-\frac{1}{2}}\kappa\left(1-\frac{1}{3}\left(\frac{\pi T}{\Delta_{00}}\right)^2\right)$$

$$= 1.70\kappa\left(1-\frac{1}{3}\left(\frac{\pi T}{\Delta_{00}}\right)^2\right) \tag{10}$$

がえられる。　Δ_{00} は $T=0$, $H=0$ での gap parameter.

ii) $T_{c0} - T \ll T_{c0}$

$$-\ln\frac{T}{T_{c0}} = \frac{\pi^2}{2}\left(\frac{\tau_{\tau r} v^2}{6\pi T}eH\right) - 7\zeta(3)\left(\frac{\tau_{\tau r} v^2}{6\pi T}eH\right)^2 , \tag{11}$$

これを解いて

$$H_{c2} = \frac{12T_{c0}}{\pi\tau_{\tau r} v^2 e}\left(1-\frac{T}{T_{c0}}\right)\left(1-\left(\frac{1}{2}-\frac{28}{\pi^4}\zeta(3)\right)\left(1-\frac{T}{T_{c0}}\right)\right) , \tag{12}$$

$$H_{c2}/H_c = \sqrt{2}\kappa\left(1+0.391\left(1-\frac{T}{T_{c0}}\right)\right) , \tag{13}$$

がえられる。

ここで　$$\kappa = \frac{3m}{2\pi^2 e\tau_{\tau r}}\left(\frac{2\pi m}{p_0^S}7\zeta(3)\right)^{\frac{1}{2}} , \tag{14}$$

$$H_c = \sqrt{\frac{2mp_0}{\pi}}\,\Delta_{00}\left(1-\frac{2}{3}\left(\frac{\pi T}{\Delta_{00}}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} , \quad T \ll \Delta_{00}$$

$$= 4T_{c0}\sqrt{\frac{\pi m p_0}{7\zeta(3)}}\,(1-\frac{T}{T_{c0}})\,(1-(1-\frac{31\zeta(5)}{(7\zeta(3))^2})\,(1-\frac{T}{T_{c0}}))\ ,$$

$$T \cong T_{c0} \qquad (15)$$

の式を用いた。

$T \cong T_{c0}$ の時の H_{c2}/H_c はG－L方程式からみちびかれるものと一致している。重要なことは、上の結果はShapovalの得たものと非常にことなることである。この不一致は $T=0$ の時に特に大きく、Shapoval によれば、

$H_{c2}/H_c\Big|_{T=0°} = 3.03\kappa$ となつている。この原因は $\widetilde{K}(q)$ が $T=0$ の近くでは q について singular になるため準古典近似が破綻するためではないかと思われる。

同様のことはGor'kov のとりあつかいについても云える。

3° 上のやり方はPauli term を考慮した場合にも簡単に拡張できる。実際ある種の超伝導体ではPauli term によつて相転移がおこると考えられている。この効果は μ をBohr magneton とするとき $\omega_n \to \omega_n + i\mu H$ の操作で上の形式に入れることができる。[9)]

$$\{\ln(\frac{T}{T_{00}}) + f_0\,(\frac{i\mu H}{2\pi T} - \frac{\tau_{\tau r} v^2}{12\pi T}\,(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - 4e^2H^2x^2))\}\,\Delta(x) = 0\ , \qquad (16)$$

ここに

$$f_0(z) = \mathrm{Re}\,\{\,\psi(\frac{1}{2}+z) - \psi(\frac{1}{2})\}$$ で

このとき H'_{c2} は

$$-\ln\frac{T}{T_{c0}} = \mathrm{Re}\,\{\psi(\frac{1}{2}+\frac{i\mu H}{2\pi T}+\frac{\tau_{\tau r} v^2}{6\pi T}\,eH) - \psi(\frac{1}{2})\}\ , \qquad (17)$$

から求められる。

i) $T \ll T_{c0}$

$$\ln(\frac{2H}{\Delta_{00}}\sqrt{(\frac{e\ell v}{3})^2+\mu^2}\,) = -\frac{2}{3}\,\frac{\pi T}{\Delta_{00}}\,\frac{1-(\frac{3\mu}{e\ell v})^2}{1+(\frac{3\mu}{e\ell v})^2}\ , \qquad (18)$$

$$\ell = \tau_{\tau r} v$$

これを解いて

$$H'_{c2}=\frac{\Delta_{00}}{2}\left(\left(\frac{e\ell v}{3}\right)^2+\mu^2\right)^{-\frac{1}{2}}\left\{1-\frac{2}{3}\left(\frac{\pi T}{\Delta_{00}}\right)^2\frac{1-\left(\frac{3\mu}{e\ell v}\right)^2}{1+\left(\frac{3\mu}{e\ell v}\right)^2}\right. ,\qquad (19)$$

がえられる。特に T＝0 のとき(9)式の H_{c2} を用いると

$$H'_{c2}=\frac{H^{*}_{cp}\,H_{c2}}{\sqrt{H^{*2}_{cp}+H^{2}_{c2}}}\ ,\qquad H^{*}_{cp}=\frac{\Delta_{00}}{2\mu}\doteq\frac{1}{\sqrt{2}}H_{cp}\qquad (20)$$

のようにかくこともできる。

ii) $T_{c0}-T\ll T_{c0}$

$$-\ell n\, t=\frac{\pi^2}{2}\left(\frac{\tau_{\tau r}v^2}{6\pi T}eH\right)+7\zeta(3)\left(\frac{\mu T}{\pi T}\right)^2\ ,\qquad (21)$$

したがつて T_{c0} の近くでは Pauli paramagnetism の影響は無視できる。

(20) 式に関連して興味あるのは II で示されるように $\mu>\mu_c=\frac{e\ell v}{3}\left(1+\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$ のような μ に対しては $T=0^0K$ で相転移の次数が一次になることである。したがつて $\mu>\mu_c$ の時には (20) 式を用いることはできなくなる。

終りにいろいろ興味ある議論をしていただいた恒藤さんに感謝します。

文　献

1) L.P. Gor'kov, JETP 36, (1959) 1918 & 37, (1959) 833.
2) L. Tewordt, Phys. Rev. 132, (1963) 595.
3) T. Tsuzuki, 物性研究 1, (1964) 289.
4) Y. Nambu and S. F. Tuan, Phys. Rev. 128, (1962) 2622.
5) L.P. Gor' kov, JETP 34, (1958) 735.
6) E.A. Shapoval, JETP 41, (1961) 877.
7) A.A. Abrikosov, JETP 32, (1957) 1442.
8) R. Werthamer, Phys. Rev. 132, (1963) 2440.
9) K. Maki and T. Tsuneto (to be published.)